Hoja 2. Relaciones, aplicaciones, relaciones de equivalencia

Susana Cubillo (2017)

Ejercicios recopilados de los apuntes y Hojas de problemas de los profesores del Dpto. Matemática Aplicada a las TIC (Campus Montegancedo). UPM.

1. Dados los conjuntos $A = \{1,2,3,4\}$ y $B = \{1,3,5\}$, y la relación R de A en B definida por $a\,R\,b \iff a < b$, describe los pares de la relación.

   Sol.: $R = \{(1,3),(1,5),(2,3),(2,5),(3,5)\}$

2. En el conjunto $\mathbb{Z}$ se define la relación aRb si y sólo si $a^2 = b^2$. Averigua si se trata de una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$ y, de ser cierto, encuentra la clase de equivalencia del elemento 5, es decir $[5]$.

   Sol.: *Reflexiva*. SI . Para todo $a \in \mathbb{Z}$, aRa , ya que $a^2 = a^2$
   Simétrica. SI. Para todo $a,b \in \mathbb{Z}$, si aRb , entonces $a^2 = b^2, b^2 = a^2$ y bRa
   Transitiva. SI. Para todo $a,b,c \in \mathbb{Z}$, si aRb y bRc , entonces $a^2 = b^2$ y $b^2 = c^2$.
   Por tanto $a^2 = c^2$ y aRc . Finalmente, SI es relación de equivalencia.

   $[5] = \{5,-5\}$

3. Dados los conjuntos $A = \{2,3,4,5\}$ y $B = \{3,6,7,10\}$ y la relación de divisibilidad *R* de A en B, $a\,R\,b \iff 'a' \, divide \, a \, 'b' \iff b \, es \, múltiplo \, de \, a$, describe los pares de la relación.

   Sol.: $R = \{(2,6),(2,10),(3,3),(3,6),(5,10)\}$

4. Sea el conjunto $\wp(S)$ de todos los subconjuntos de $S = \{a,b\}$, y la relación R definida en $\wp(S)$ por $A\,R\,B \iff |A \cap B| = 1$. Averiguar si es una relación reflexiva, simétrica y/o transitiva.

   Sol.: *Reflexiva*. No. Por ejemplo, dado para todo $\{a,b\} \in \wp(S)$,
   $$|\{a,b\} \cap \{a,b\}| = |\{a,b\}| = 2$$

Simétrica. Si. Para todo $M, N \in \wp(S)$, si $M\ R\ N$, entonces $|M \cap N| = 1$, $|N \cap M| = 1$, y finalmente, $N\ R\ M$.

Transitiva. No. $\{a\}\ R\ \{a, b\}$ y $\{a, b\}\ R\ \{b\}$, pero NO es cierto $\{a\}\ R\ \{b\}$.

5. Estudiar si las relaciones en el conjunto $A = \{a, b, c\}$, dadas por las siguientes matrices, son reflexivas, antisimétricas y transitivas.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sol.: M no reflexiva, no simétrica, no transitiva (a R c, c R b , pero no es cierto a R b)

N no reflexiva, no simétrica, sí transitiva

6. Dada la relación definida en $\mathbb{Z}$ por: $a\ R\ b \iff a - b = 5 \cdot k$, con $k \in \mathbb{Z}$, estudiar si es una relación reflexiva, simétrica y transitiva, y encontrar tres números enteros no relacionados entre sí.

Sol.: Reflexiva. SI. Para todo $a \in \mathbb{Z}$, $a - a = 5 \cdot 0$, para todo $0 \in \mathbb{Z}$.

Simétrica. SI. Para todo $a, b \in \mathbb{Z}$, si $a\ R\ b$ entonces $a - b = 5k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Entonces, $b - a = 5(-k)$, con $(-k) \in \mathbb{Z}$. Luego $b\ R\ a$.

Transitiva. SI. Para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}$, si $a\ R\ b$ y $b\ R\ c$, se tiene que $a - b = 5k_1$, y $b - c = 5k_2$, con k_1 , $k_2 \in \mathbb{Z}$. Sumando las dos ecuaciones, queda $a - c = 5(k_1 + k_2)$, con $(k_1 + k_2) \in \mathbb{Z}$. Luego $a\ R\ c$.

Los números 1, 2 y 3 no están relacionados entre sí.

7. Halla el dominio y la imagen (o rango) de cada una de las siguientes relaciones:
   a) $R = \{(1,5), (4,5), (1,4), (4,6), (3,7), (7,6)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
   b) S definida en $\mathbb{N}$ por $x\ S\ y \iff 2x + y = 16$.
   c) T definida en $\mathbb{N}$ por $x\ T\ y \iff 3x + y = 25$.

Sol.: a) Dominio= $\{1, 3, 4, 7\}$ Imagen = $\{4, 5, 6, 7\}$

b) $S = \{(1, 14), (2, 12), (3,10), (4, 8), (5, 6), (6, 4), (7, 2)\}$

Dominio (S) = $\{1,2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ Imagen (S) = $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$

c) $T = \{(1, 22), (2, 19), (3,16), (4,13), (5,10), (6,7), (7, 4), (8, 1)\}$

Dominio (T) = $\{1,2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ Imagen (T) = $\{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22\}$

8. En $A = \{a, b, c, d\}$ se consideran las siguientes relaciones:
   a) $R = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)\}$ c) $S = \{(d, c), (c, b), (a, b), (d, d)\}$
   b) $T = \{(a, a), (b, a), (c, a), (d, d)\}$ d) $R = \{(b, a), (a, c), (d, d)\}$

   Averigua cuáles son aplicaciones y cuáles no lo son.

Sol.: Son aplicaciones la a) y la b)

9. Demuestra que la función $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(n) = \begin{cases} \frac{n}{s}, & si\ n\ es\ par \\ -\frac{n-1}{s}, & si\ n\ es\ impar \end{cases}$ es una aplicación.

10. Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y la relación dada por $R = \{(1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (3,5), (4,2), (4,4), (5,1), (5,3), (5,5)\}$, obtén sus propiedades. ¿Es una relación de equivalencia? En caso afirmativo, determina el conjunto cociente.

Sol.: Es reflexiva, simétrica y transitiva. Por tanto, es una relación de equivalencia.
$A/_R = \{\ \{1, 3, 5\},\ \{2, 4\}\ \} = \{\ [1]\ ,\ [2]\}$

11. Sea el conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, y la partición dada por $P = \{\{a, d, e\}, \{c, f\}, \{b\}\}$, define una relación de equivalencia, cuyo conjunto cociente coincida con P.

Sol.: $R = \{(a, a), (a, d), (a, e), (d, d), (d, a), (d, e), (c, c), (c, f), (f, f), (f, c), (c, c)\}$

12. En el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se define la relación $(a, b) R\ (c, d) \iff a \cdot d = b \cdot c$. Averigua si es una relación de equivalencia, y en caso afirmativo, obtén la clase $[(4, 8)]$.

Sol.: *Reflexiva*. SI. Para todo $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, es $(a, b) R\ (a, b)$, ya que $a \cdot b = b \cdot a$
Simétrica. SI. Para todo $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, si $(a, b)\ R\ (c, d)$ es $a \cdot d = b \cdot c$, y por tanto $c \cdot b = d \cdot a$ y $(c, d)\ R\ (a, b)$.
Transitiva. SI. Para todo $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, si $(a, b)\ R\ (c, d)$ y $(c, d)\ R\ (e, f)$, entonces $a \cdot d = b \cdot c$ y $c \cdot f = d \cdot e$. Multiplicando las dos ecuaciones, resulta $a \cdot d \cdot c \cdot f = b \cdot c \cdot d \cdot e$, y simplificando, $a \cdot f = b \cdot e$, por lo que $(a, b)\ R\ (e, f)$

$$[(4, 8)] = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\ ;\ (4, 8)\ R\ (a, b)\ \} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\ ;\ 4 \cdot b = 8 \cdot a\}$$
$$= \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\ ;\ b = 2 \cdot a\} = \{(1,2), (2,4), (3, 6), \ldots\}$$

13. En el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se define la relación $(a, b) R\ (c, d) \iff a + d = b + c$. Averigua si es una relación de equivalencia, y en caso afirmativo, obtén la clase $[(2,5)]$.

Sol.: *Reflexiva*. SI. Para todo $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, es $(a, b) R\ (a, b)$, ya que $a + b = b + a$

Simétrica. SI. Para todo $(a,b),(c,d) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, si $(a,b)\ R\ (c,d)$ es $a+d=b+c$, y por tanto $c+b=d+a$ y $(c,d)\ R\ (a,b)$.
Transitiva. SI. Para todo $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, si $(a,b)\ R\ (c,d)$ y $(c,d)\ R\ (e,f)$, entonces $a+d=b+c$ y $c+f=d+e$. Sumando las dos ecuaciones, resulta $a+d+c+f=b+c+d+e$, y simplificando, $a+f=b+e$, por lo que $(a,b)\ R\ (e,f)$

$$[(2,5)] = \{(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\ ;\ (2,5)\ R\ (a,b)\} = \{(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\ ;\ 2+b=5+a\}$$
$$= \{(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\ ;\ b=a+3\} = \{(1,4),(2,5),(3,6),\dots.\}$$

14. En $\mathbb{R}^2$ se define la relación $(x,y)\,R\,(z,t) \Leftrightarrow x\cdot y = z\cdot t$. Comprueba que es una relación de equivalencia, y obtén el conjunto cociente.

Sol.: *Reflexiva*. SI. Para todo $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, es $(a,b)R\,(a,b)$, ya que $a\cdot b = a\cdot b$
Simétrica. SI. Para todo $(a,b),(c,d)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, si $(a,b)\,R\,(c,d)$ es $a\cdot b=c\cdot d$, y por tanto $c\cdot d = a\cdot b$ y $(c,d)\,R\,(a,b)$.
Transitiva. SI. Para todo $(a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, si $(a,b)\,R\,(c,d)$ y $(c,d)\,R\,(e,f)$, entonces $a\cdot b=c\cdot d$ y $c\cdot d=e\cdot f$. Por tanto, $a\cdot b = e\cdot f$, por lo que $(a,b)\,R\,(e,f)$

$$[(a,b)] = \{(c,d)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\ ;\ (a,b)\,R\,(c,d)\} = \{(c,d)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\ ;\ a\cdot b=c\cdot d\}$$
$$= [(1, a\cdot b)]$$

Por tanto, el conjunto cociente es $\mathbb{R}^2/_R = \{\ [(1,r)]\ ;\ r\in\mathbb{R}\ \}$

15. En $\mathbb{Z}$ se define la relación $x\ R\ y \Leftrightarrow x^2-y^2=x-y$. Comprueba que es una relación de equivalencia, y obtén el conjunto cociente.

Sol.: *Reflexiva*. SI. Para todo $x\in\mathbb{Z}$, es $x\,R\,x$, ya que $x^2-x^2=x-x=0$
Simétrica. SI $x\,R\,y$, es $x^2-y^2=x-y$, y $y^2-x^2=y-x$; por tanto $y\,R\,x$
Transitiva. SI. Para todo $x,y,z\in\mathbb{Z}$, si $x\,R\,y$ y $y\,R\,z$, se tiene que $x^2-y^2=x-y$ y $y^2-z^2=y-z$. Sumando las dos ecuaciones, y simplificando, se obtiene $x^2-z^2=x-z$. Por tanto $x\,R\,z$

$$[x] = \{y\in\mathbb{Z}\ ;\ x\ R\ y\} = \{y\in\mathbb{Z}\ ;\ x^2-y^2=x-y\} =$$
$$= \{y\in\mathbb{Z}\ ;\ (x+y)\cdot(x-y)=x-y\} = \{y\in\mathbb{Z}\ ;\ y=x \text{ ó } x+y=1\} = \{x, 1-x\}$$

Por tanto, el conjunto cociente es $\mathbb{Z}/_R = \{\{1,0\},\ \{2,-1\},\{3,-2\},\dots\} = \big\{\{x,1-x\};\ \ x\in\mathbb{Z},\ x\ \geq 1\big\} = \{[x]\ ;\ x\in\mathbb{Z},\ x\ \geq 1\}$

16. En $\mathbb{R}^2$ se define la relación $(x, y)\ R\ (z, t) \iff x + t = y + z$. Comprueba que es una relación de equivalencia, y obtén el conjunto cociente.

Sol.: *Reflexiva*. SI. Para todo $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, es $(x, y) R\ (x, y)$, ya que $x + y = y + x$

Simétrica. SI. Para todo $(x, y), (z, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, si $(x, y)\ R\ (z, t)$ es $x + t = y + z$, y por tanto $z + y = t + x$ y $(z, t)\ R\ (x, y)$.

Transitiva. SI. Para todo $(x, y), (z, t), (u, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, si $(x, y)\ R\ (z, t)$ y $(z, t)\ R\ (u, w)$, entonces $x + t = y + z$ y $z + w = t + u$. Sumando las dos ecuaciones, resulta $x + t + z + w = y + z + t + u$, y simplificando, $x + w = y + u$, por lo que $(x, y)\ R\ (u, w)$

$$[(x, y)] = \{(z, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\ ;\ (x, y)\ R\ (z, t)\} = \{(z, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\ ;\ x + t = y + z\}$$
$$\{(z, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\ ;\ t = (y - x) + z\}$$
$$= \{(0, y - x), (1, y - x + 1), (2, y - x + 2), \dots .\} = [\,(0, y - x)]$$

Por tanto, el conjunto cociente es

$$\mathbb{R}/_R = \{[(0, r)];\ \ r \in \mathbb{R}\} = \{\,\{(0, r),\ (1, r + 1), (2, r + 2), \dots\};\ \ r \in \mathbb{R}\}$$